دترمینانها

دترمینان ماتریسهای مرتبه‌ی دوم

ابتدا تعریفی از ماتریس ارائه می کنیم. ماتریس، تشکیل شده است از یک آرایش مستطیلی اعداد، یعنی عددهایی که در چند سطر و ستون، به صورت مرتبط در کنار هم نوشته شده اند. این عددها را اصطلاحاً درایه می نامیم. ماتریس را با یک جفت پرانتز یا با یک جفت کروشه، به یکی از صورت های زیر می توان نشان داد،

*در این کتاب، بیشتر از نماد دوم برای نمایش ماتریس استفاده می کنیم.*

*فرض کنید ماتریس A ، به صورت تعریف شده باشد. همانطور که مشخص است این ماتریس داری دو سطر و دو ستون است. اندیس 11، در درایه a11 برای معرفی جای این درایه به کار رفته است و منظور از آن این است که a11، درایه سطر اول و ستون اول است. اندیس 12 برای a12 به معنای آن است که این درایه در سطر اول و در ستون دوم قرار گرفته است. همینطور اندیس 21 برای a21 به این معنا است که a21 درایه سطر دوم و ستون اول است و سرانجام 22 در a22 نشان می دهد که a22 درایه سطر دوم و ستون دوم است.*

*چون ماتریس بالا دارای دو سطر دو ستون است، آن را اصطلاحاً یک ماتریس 22 (دو در دو) یا ماتریس مرتبه دو می نامیم. چنین ماتریس هایی را که تعداد سطر و ستون آنها با هم برابر است ماتریس مربع می نامیم.*

*مفهوم دترمنان فقط برای ماتریس های مربع یعنی ماتریسی که تعدا سطر و ستون آنها با هم برابر است، تعریف شده است. مثلاً دترمینان ماتریسهای22 ، 33، 44 تعریف شده و با معناست در حالی که دترمینان ماتریس ها 32 ، 43، 35 تعریف نشده است.*

*اگر A ماتریسی باشد که در بالا معرفی کردیم، دترمینان A را با یکی از نمادهای زیر نمایش می‌دهیم:*

*دترمینان ماتریس مربع مرتبه دوم به صورت زیر تعریف می شود:*

*همانطور که ملاحظه می کنید، درایه های واقع بر قطر اصلی (درایه سمت چپ بالا و درایه سمت راست پایین) را از آن کم نموده ایم . پس دترمینان ماتریس 22 عبارت است از حاصلضرب درایه های واقع بر قطر اصلی ماتریس، منهای حاصلضرب درایه های واقع بر قطر فرعی ماتریس.*

***مثال حل شده 1***

*مقدار دترمینان را بدست آورید.*

***مثال حل شده 2***

*حاصل هر یک از دترمینان های زیر را بدست آورید.*

الف)

*ب)*

*ج)*

***مثال حل شده 3***

*مقدار هر یک از دترمینان های زیر را بدست آورید.*

دستور کرامر

دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را در نظر نظر بگیرید:

همانطور که از فبل می دانستید، روش حل یک دستگاه دو معادله دو مجهولی، مثل دستگاه بالا، به این صورت است که ابتدا یکی از متغیرها را حذف می کنیم. این کار با ضرب کردن طرفین رابطه(1) در و ضرب کردن طرفین رابطه(2) در و سپس با جمع کردن دو رابطه حاصل، انجام می شود:

با جمع کردن دو رابطه (3) و (4)، متغیر x حذف خواهد شد و می توانیم مقدار مقدار y را محاسبه کنیم:

حال، برای اینکه مقادیر x و y را سریعاً و به کمک دستور کرامر محاسبه کنیم، به صورت زیر عمل می کنیم، در معادله های (1) و (2)، و را به طرف چپ تساوی می آوریم و ضرایب حاصل را زیر همدیگر می نویسیم. حاصل می شود

*دترمینان ماتریسی را که* از حذف ستون اول این اعداد به دست می آید با و دترمینان ماتریسی را که از حذف ستون دوم به دست می آید با نمایش می دهیم. خواهیم داشت

دترمینان حاصل از حذف ستون سوم آرایه بالا را می نامیم. این دترمینان ضرایب است:

حال می توان مشاهده کرد که رابطه (5) را می توان به صورت زیر نوشت:

اگر متغیر y را از دستگاه حذف کنیم تا مقدار x به دست آید، روش کار به صورت زیر خواهد بود. طرفین رابطه (1) را در و طرفین رابطه (2) را در ضرب می کنیم؛ به دست می آید

با جمع کردن نظیر به نظیر طرفین رابطه های (6) و (7)، مقدار x به صورت زیر به دست خواهد آمد:

با توجه به تعریفی که از دترمینان ها کردیم، رابطه (8) را می توان به صورت زیر نوشت:

و حال، دستور کرامر را برای حل این دستگاه دو معادله دو مجهولی به صورت زیر بیان می کنیم:

اگر با حل یک دستگاه سه معادله سه مجهولی مواجه شویم، دستور کرامر، می تواند به صورت زیر، به کار آید:

در حالت کلی، برای به دست آوردن مقدار متغیرهای یک دستگاه n معادله n مجهولی، از تعمیم دستور کرامر استفاده می کنیم؛ یعنی

به طور خلاصه، برای حل یک دستگاه دو معادله دو مجهولی به صورت زیر:

ابتدا، همه متغیرها و پارامتر ها را به یک طرف تساوی منتقل می کنیم تا طرف دوم هر معادله صفر باشد:

با استفاده از تعریف دترمینانها یعنی دترمینان ضرایب، دترمینانی که در آن ستون ضرایب x حذف شده است و دترمینانی که در آن ستون ضرایب y حذف شده است، خواهیم داشت

و به کمک دستور کرامر، یعنی

می توان مقادیر x و y را به صورت زیر محاسبه کرد:

*این روش، یعنی دستور کرامر، روشی است که در آن برای حل دستگاه های معادلات، از دترمینان استفاده می کنیم.*

*مثال حل شده 4*

*دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را با استفاده از دستور کرامر حل و مقادیر x و y را محاسبه کنید.*

*حل.*

*رابطه (1) و (2) یعنی هر یک از معادله های دستگاه فوق را به صورت زیر، بازنویسی می کنیم:*

*و با توجه به تعریف ارائه شده می نویسیم*

*همانطور که ملاحظه می کنید ستون اول را برای نوشتن حذف کرده ایم. همچنین ستون دوم را برای تشکیل حذف کرده ایم و سرانجام برای نوشتن یعنی دترمینان ضرایب ستون سوم حذف شده است. حال مقدار عددی هر یک از دترمینان ها را محاسبه می کنیم:*

و از دستور کرامر، به دست می آید

x=1

y=2

*ماتریس ها*

*مطلبی در مورد ماتریس ها*

*در بخش های قبل دیدید که چگونه ماتریس 22، یا مرتبه دو را که دارای دو سطر و دو ستون است به صورت*

*نشان می دهیم. یک ماتریس آرایه ای مستطیلی از اعداد حقیقی است و ما این اعداد را بین دو پرانتز نشان می دهیم. به مثال های زیر که در آنها ماتریس های مختلفی تعریف شده است، دقت کنید:*

*حال به مشخصات ماتریس های معرفی شده در مثال های بالا توجه کنید:*

*ماتریس (الف) دارای 4 درایه است(به هر کدام از اعضای ماتریس، یک درایه می گوییم) هر یک از ماتریس های (ب) و (ج) دارای 2، ماتریس (د) و (ه) دارای 6 و ماتریس (و) دارای 9 درایه است. یکی از مشخصات ماتریس ها تعداد سطرها و ستون های آنهاست. مثلاً ماتریس (الف) دارای دو سطر و دو ستون است. ماتریس (ب) دارای دو سطر و یک ستون است، ماتریس (ج) دارای یک سطر و دو ستون است، ماتریس (د) دارای دو سطر و سه ستون، ماتریس (ه) دارای سه سطر و دو ستون و ماتریس (و) دارای سه سطر و سه ستون است.*

*«مرتبه» هر ماتریس نیز یکی دیگر از وی*

*ویژگی های ماتریس است. مثلاً ماتریس (الف) یک ماتریس 22 است. (دو در دو) که 2 اول نشانگر تعداد سطرهای ماتریس و دومین 2 به معنای تعداد ستون های ماتریس است؛ ماتریس (ب) یک ماتریس 1 2 است. چرا که دارای 2 سطر و یک ستون است، ماتریس (ج) چون دارای یک سطر و دو ستون است، یک ماتریس 21 است. ماتریس (د) 32، ماتریس (ه) 23 و ماتریس (و) 33 است.*

*معمولاً یک ماتریس مرتبه دوم را به شکل کلی زیر نمایش می دهیم:*

*این طرز نمایش، برای یک ماتریس 22 کلی است و زمانی به کار می رود که درایه های ماتریس، اعداد خاصی نباشند. در این طرز نمایش، چهار عدد به کار رفته به جای درایه های ماتریس 22، با اندیسی مشخص شده اند که مفهوم آن، جای واقع شدن آن درایه از نظر سطر و ستون است. مثلاً یهنی درایه سطر اول (از اولین 1)، ستون اول(از دومین 1)، یعنی درایه سطر اول، ستون دوم، به معنای درایه سطر دوم و ستون اول و نیز به معنای درایه واقع بر سطر دوم و ستون دوم است.*

*همان گونه که در بخش های قبل نیز دیدید، درایه های این ماتریس 22 می توانند ضرایب یک دستگاه معادلات دو مجهولی (با مجهولات x و y) باشند، که به صورت زیر قابل نوشتن است:*

در معادلات بالا غیر از متغیرهای x و y شش عدد وجود دارد، که عبارت اند از ، ، ، ، ، و این شش عدد می توانند، به صورت درایه های یک ماتریس نوشته شوند،

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| جمله ثابت | ضریب y | ضریب x |  |
|  |  |  | معادله اول |
|  |  |  | معادله دوم |

ماتریسی که اشاره کردیم، با دو سطر و سه ستون به صورت زیر نوشته شود:

در حالت کلی، ماتریسی را که دارای n سطر و m ستون باشد یک ماتریس nm می نامیم.

شکل کلی نمایش یک ماتریس nm به صورت زیر است:

*انواع ماتریس ها*

*ماتریس مربعی: شکل کلی ماتریس مربعی 22 به صورت زیر است که دو سطر و دو ستون دارد:*

*به طور کلی، ماتریس مربعی ماتریسی است که تعداد سطر و ستون هایش مساوی باشد.*

*ماتریس سطری. ماتریس سطری ماتریسی است که دارای چندد ستون، ولی فقط یک سطر است؛ مثلاً* B=(*a b c*)

*ماتریس ستونی. ماتریس ستونی ماتریسی است که دارای یک ستون و چند سطر است؛ مثلاً*

*ماتریس مستطیلی. ماتریس مستطیلی ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون هایش مساوی نباشد؛ مثلاً*

*ماتریس صفر. ماتریسی که تمام درایه های آن صفر است ماتریس صفر نام دارد؛ مثلاً،*

ماتریس صفر مرتبه

)ماتریس صفر مرتبه )

*ماتریس ترانهاده: ترانهاده ماتریس A را با نمایش می دهیم و طرز تشکیل آن، به این صورت است جای همه سطرها و ستون ها ماتریس A را با هم تعویض می کنیم؛ مثلاً اگر ، آنگاه ، آگر این دو ماتریس را با هم مقایسه کنید متوجه می شوید که سطر اول A، ستون اول AT ، و و سطر دوم A، ستون دوم AT است. ترانهاده یک ماتریس سطری، ماتریسی ستونی و ترانهاده یک ماتریس ستونی، ماتریسی سطری است؛ مثلاً،*

*ماتریس پایین مثلثی. ماتریس مربعی را پایین مثلثی می نامیم آگر همه درایه های واقع در بالای قطر اصلی آن صفر باشند؛ مثلاً ماتریس های زیر پایین مثلثی اند.*

*ماتریس بالا مثلثی. ماتریسی مربعی را بالا مثلثی می نامیم اگر همه درایه های واقع در پایین قطر اصلی آن، صفر باشند. مثلاً، ماتریسهای زیر بالا مثلثی اند.*

*ماتریس قطری. ماتریس قطری ماتریسی مربعی است که همه درایه های آن صفر باشد بجز درایه‌های واقع در قطر اصلی. مثلاً G یک ماتریس قطری مرتبه 2 است وH یک ماتریس قطری مرتبه 3 است:*

*ماتریس قطری هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثلی است.*

*ماتریس همانی. ماتریس همانی ماتریسی قطری است، که همه درایه های واقع بر قطر اصلی آن، واحد (عدد یک) هستند. به ماتریس های همانی مرتبه دو و سه که در زیر داده شده اند توجه کنید:*

ماتریس همانی را معمولاً با حرف I نشان می دهند.

مجموع اعداد واقع بر قطر اصلی یک ماتریس قطری را «رّد» ماتریس می نامند. اگر A ماتریسی دلخواه باشد، رّد A را با trA، نشان می دهیم و داریم .

مثال حل شده 19

رّد ماتریس های قطری زیر را به دست آورید.

*حل.*

*الف) بنابر تعریف، خواهیم داشت، trA=1+2+3=6*

*ب) بنابر تعریف، trB=a+b+c*

*عضو بی اثر ماتریس ها*

*ماتریس همانی که در بخش قبل معرفی شد، چه از چپ و چه از راست در هر ماتریسی از مرتبه همانی، ضرب شود، حاصل همان ماتریس خواهد بود. مثلاً*